A 79 TA

OPTION TA - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option TA, comporte 4 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

Résultat préparatoire :

Soit D_n la fonction des n variables réelles $t_1, t_2, \ldots, t_n$ définie par la relation :

$$D_n(t_1,t_2,\ldots,t_n) = \begin{vmatrix} t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \ldots & t_n^{n-1} \\ t_1^{n-2} & t_2^{n-2} & \ldots & t_n^{n-2} \\ \ldots & & & \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

n est un entier : $n = 1,2,\ldots$

Montrer que, pour $t_2, t_3, \ldots t_n$ donnés, il existe un polynôme P, à coefficients réels, tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = D_n(x,t_2,t_3,\ldots,t_n) .$$

Préciser le degré de P, ses racines et le coefficient du terme de plus haut degré. En déduire l'expression de $D_n(t_1,t_2,\ldots,t_n)$.

∘∘∘

Soit [a,b] un intervalle fermé et borné de la droite réelle. Dans tout le problème, C^q désignera l'ensemble des fonctions numériques q fois continûment dérivables sur [a,b] ; de plus : soit f une fonction numérique définie sur [a,b] ; on pose :

$$f_+ = \mathrm{Sup}(f,0) \qquad f(t)_+ = \mathrm{Sup}(f(t),0)$$

Soient q et n deux entiers tels que : $2 \leqslant q \leqslant n$.

Soient n+2 points distincts de l'intervalle [a,b] :

$$a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots t_n < t_{n+1} = b .$$

Soit S l'ensemble des fonctions réelles s définies sur [a,b] qui vérifient les trois propriétés :

(i) s est un polynôme de degré au plus égal à 2q-1 dans chacun des intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ $\quad i = 1,2,\ldots,n-1$.

(ii) s est un polynôme de degré au plus égal à q-1 dans les intervalles $[a,t_1[$ et $]t_n,b]$.

(iii) s est (2q-2) fois continûment dérivable .

T.S.V.P.

PARTIE I

1°) Montrer que S est un espace vectoriel.

2°) a) Soit Y_i la fonction définie sur [a,b] par :

$$Y_i(t) = \frac{(t - t_i)_+^{2q-1}}{(2q-1)!} \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1)$$

Vérifier que la fonction Y_i appartient à C^{2q-2} mais que sa dérivée d'ordre $2q-1$ est discontinue en t_i .

Soit s la fonction définie sur [a,b] par :

$$s(t) = \sum_{j=0}^{q-1} \alpha_j t^j + \sum_{j=1}^{n} d_j Y_j(t) \qquad (2)$$

Les α_j $j = 0,1,\ldots q-1$ et les d_j $j = 1,2,\ldots,n$ sont des réels donnés.

Vérifier que les propriétés (i) et (iii) sont satisfaites mais que la propriété (ii) n'est vérifié que si les d_j satisfont les relations :

$$\sum_{i=1}^{n} d_i (t_i)^k = 0 \qquad k = 0,1,\ldots q-1 \qquad (3)$$

b) Soit s une fonction appartenant à S ; soit P_i le polynôme vérifiant la relation :

$$\forall\, t \in\ ]t_i, t_{i+1}[\qquad P_i(t) = s(t) \qquad i = 0,1,\ldots,n$$

Préciser le degré du polynôme P_i .

Montrer qu'il existe une suite de scalaires d_i telle que :

$$\forall\, t \in\ ]t_i, t_{i+1}[\qquad P_i(t) = P_{i-1}(t) + d_i Y_i(t) \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Que représente d_i pour la fonction s ?

En déduire que la fonction s vérifie la relation (2) et que les scalaires d_i vérifient les relations (3).

c) Dans le cas particulier : $n = 3$, $q = 2$, $a = 0$, $b = 4$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 3$, préciser les fonctions s de S ; de combien de paramètres dépendent-elles ? Envisager le cas d'une fonction s telle que $s(t_i) = 0$ $i = 1,2,3$.

3°) Soient les fonctions f appartenant à C^q et s appartenant à S ; soit I l'intégrale :

$$I = \int_a^b s^{(q)}(t)\, f^{(q)}(t)\, dt \ .$$

Montrer que l'intégrale I se calcule en fonction des $f(t_i)$ $i = 1,2,\ldots,n$ et des différences $\sigma_i = v_i - v_{i-1}$ $i = 1,2,\ldots,n$ où les v_i sont définis par les relations :

$$v_i = s^{(2q-1)}(t) \qquad \forall\, t \in]t_i, t_{i+1}[\qquad i = 0,1,\ldots,n \ .$$

Déterminer les fonctions s de S telles que :

$$s(t_i) = 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n \ .$$

4°) Dans le cas $n = q$, préciser les d_i $i = 1,2,\ldots,n$; en déduire une définition simple de S et préciser sa dimension.

5°) Soit r_i $i = 1,2,\ldots,n$ une suite de n réels ; montrer qu'il existe un élément s_0 unique de S tel que :

$$s_0(t_i) = r_i \qquad i = 1,2,\ldots,n .$$

Distinguer le cas $n = q$ du cas $n > q$.

En déduire la dimension de S pour $n > q$.

PARTIE II

Soit X un espace vectoriel réel ; une application a de XxX dans $\mathbb{R}$ est un semi-produit scalaire si elle a les propriétés :

$$a(\lambda f + \mu g , h) = \lambda a(f,h) + \mu a(g,h) \quad \forall \lambda , \mu \in \mathbb{R} \quad \forall f , g , h \in X$$

$$a(f,g) = a(g,f) \qquad \forall f , g \in X$$

$$a(f,f) \geqslant 0 \qquad \forall f \in X$$

L'application $p : f \rightsquigarrow a(f,f)^{1/2}$ est appelée semi-norme sur X .

1°) Soit A le noyau de a ; c'est-à-dire :

$$A = \{ f \mid f \in X \ : \ a(f,g) = 0 \quad \forall g \in X \}$$

Montrer que A est un sous-espace vectoriel.

En admettant le résultat :

$$\forall f , g \in X \qquad a(f,g)^2 \leqslant a(f,f).a(g,g) ,$$

montrer que le noyau P de p, c'est-à-dire $P = \{f \mid f \in X : p(f) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de X.

Application : déterminer le noyau P en prenant :

$$X = C^q \qquad a(f,g) = \int_a^b f^{(q)}(t)\, g^{(q)}(t)\, dt$$

2°) Soit V et W deux sous-espaces vectoriels de X tels que :

$$\forall f \in V \qquad \forall g \in W \qquad a(f,g) = 0$$

Soit V_1 et W_1 des translatés de V et W définis par :

$$V_1 = \{ f_1 \mid f_1 \in X \ : \ f_1 = f + c \quad f \in V \}$$

$$W_1 = \{ g_1 \mid g_1 \in X \ : \ g_1 = g + d \quad g \in W \}$$

c et d sont deux éléments donnés de X .

Soit $h \in V_1 \cap W_1$; montrer :

$$\forall f_1 \in V_1 \quad \forall g_1 \in W_1 \qquad p(f_1 - g_1)^2 = p(f_1 - h)^2 + p(g_1 - h)^2 .$$

En déduire :

$$\forall g_1 \in W_1 \qquad p(h - g_1) = \inf_{f_1 \in V_1} p(f_1 - g_1) .$$

Soit E le sous-ensemble de V_1 défini par :

$$E = \{ k \mid k \in V_1 \ : \ \forall g_1 \in W_1 \quad p(k-g_1) = \inf_{f_1 \in V_1} p(f_1 - g_1) \}$$

Montrer :

$$k \in E \iff k - h \in P \cap V$$

3°) Soit $X = C^q$; soit r_i $i = 1,2,\ldots,n$ une suite de n réels ; soit I_r l'ensemble :

$$I_r = \{ f \mid f \in C^q : f(t_i) = r_i \quad i = 1,2,\ldots,n \}$$

Montrer que I_r est le translaté d'un sous-espace vectoriel I_0 .

Soit s_0 la fonction de S définie à la question n°5 de la partie I .

a) Montrer que s_0 vérifie la propriété :

$$\forall f \in I_r \qquad \int_a^b (s_0^{(q)}(t) - f^{(q)}(t))^2 \, dt = \inf_{s \in S} \int_a^b (s^{(q)}(t) - f^{(q)}(t))^2 \, dt$$

Montrer que toute fonction s_1 de S vérifiant cette même propriété diffère de s_0 par l'addition d'un polynôme de degré inférieur ou égal à q-1 .

b) Enoncer un résultat analogue en échangeant les rôles joués par S et I_r .

En déduire une caractérisation de s_0 .

Montrer en particulier :

$$\int_a^b s_0^{(q)}(t)^2 \, dt = \inf_{f \in I_r} \int_a^b f^{(q)}(t)^2 \, dt \ .$$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail